УДК 681.3

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗАДЕРЖКИ МЕЖДУ СТАРТАМИ КОНВЕЙЕРОВ С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ ПЕРЕСЫЛКИ ДАННЫХ

Р.Б. Штейнберг
*Ростовский Государственный Университет*
Россия, 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105
E-mail: romanofficial@yandex.ru

**Ключевые слова:** многоконвейерные архитектуры, решетчатый граф, вычисление задержек
**Key words:** multipipeline architectures, lattice graph, delay calculations

В данной работе рассматривается задача синхронизации нескольких конвейеров в многоконвейерной вычислительной системе. В рамках рассматриваемой модели допускается возможность пересылок данных между конвейерами. Для исследования используется теория решетчатых графов. Результаты этой и других работ используются при разработке Открытой распараллеливающей системы.
**CALCULATION OF PIPELINE START DALAYS THAT TAKES INTO CONSIDERATION DATA SEND TIME** / R.B. Steinberg (Rostov State University, 105 B Sadovaya-street, Rostov-on-Don, 344006, Russia, E-mail: romanofficial@yandex.ru). The problem of several pipeline synchronization in multipipeline computer system is considered in the present paper. In the context of considering model, the possibility of data send between pipelines is allowed. The analysis uses the lattice graphs theory. The results of this and other researches are applied to development of Open Parallelizing System.

## 1. Введение

### 1.1. Постановка задачи

Хорошо известно, что конвейерные вычисления (см. [1-3], [6]) отличаются высокой эффективностью на широком классе программ. Данная работа является обобщением работы [4] и допускает возможность пересылок данных между конвейерами.

Качество конвейеризации цикла на компьютере с несколькими процессорами можно рассматривать по нескольким параметрам: средняя загруженность каждого процессора, объем вычислений выполняемых последовательно, количество пересылок данных и т.д. Но сама возможность преобразования цикла к «хорошему» виду, также как и все эти параметры качества распараллеливания, зависит от зависимостей между данными. Так, например, есть циклы, которые ни распараллеливать, ни преобразовывать нельзя именно ввиду этих зависимостей.

*Определение 1.* Вхождением переменной будем называть пару: переменная и место в тексте программы, где происходит обращение к этой переменной.

*Определение 2.* Вхождение переменной называется генератором, если в этом месте программы в ячейку памяти, соответствующую этой переменной, происходит запись. В противном случае (чтение из ячейки), вхождение называется использованием.

*Определение 3.* Два вхождения называются зависимыми, если они обращаются к одной и той же ячейке памяти. При этом говорят, что вхождение *v* зависит от вхождения *u*, если вхождение *v* обращается к некоторой ячейке памяти позже, чем вхождение *u*.

*Определение 4.* Пусть вхождение *u* зависит от вхождения *v*. Зависимость между *u* и *v* называется истинной (потоковой), если *u* – использование, а *v* – генератор.

В данной работе будет рассмотрен двумерный цикл с одной информационной зависимостью:

```
    Do 10 i1=1,N1
    Do 10 i2=1,N2
    X[a1*i1+c1*i2+d11, a2*i1+c2*i2+d12] = …
10  … =… X[b1*i1+c1*i2+d21, b2*i1+c2*i2+d22],
```

в котором параметры N1,N2,a1,a2,b1,b2,c1,c2,d11,d12,d21,d22 принимают целочисленные значения. Влияние нескольких информационных зависимостей на задержку в стартах конвейеров можно оценить как максимум задержек, вычисленных для каждой отдельной зависимости.

Предположим, этот цикл должен быть реализован на многоконвейерной архитектуре, т.е. конвейерно будет выполняться внутренний цикл, а конвейеров будет N1 штук.

Уточним условия, при которых будет конвейеризоваться внутренний цикл.

1) Будем считать, что количество ресурсов не ограничено, т.е. в один момент времени мы можем запустить любое количество конвейеров.
2) Будем предполагать, что время дискретно. Время между стартами итераций внутри одного конвейера обозначим *iii*. Время выполнения одной итерации цикла обозначим $T_{it}$ (естественно полагать эту величину не меньшей 1). Время пересылки данного между конвейерами обозначим $T_{send}$.
3) Будем считать, что конвейеры всегда стартуют последовательно и время между стартами соседних конвейеров величина постоянная (будем называть ее задержкой между стартами конвейеров или просто задержкой).
4) Значащие элементы массива X[i,j] находятся не только в целочисленном прямоугольнике [1,N1]×[1,N2], но и за его пределами, т.е. для любых i, j ячейка X[i,j] содержит значение важное для работы программы. Разумно предположить, что в правильно работающей программе индексные выражения находятся в пределах границ массива.

В дальнейшем эти условия будем называть условиями на математическую модель или соглашениями. Отметим, что переход от полученного в итоге решения к решению задачи с ограниченным количеством ресурсов и/или переменным количеством конвейеров стартующих одновременно, представляется несложным.

Целью данной работы является выявление межитерационных зависимостей в описанном выше цикле и вычисление задержки между стартами конвейеров, на которые этот цикл будет отображаться. Это особенно актуально для суперкомпьютеров с перестраиваемой архитектурой, потому что для этого класса компьютеров есть возможность работать с любым циклом такого вида, но нужно соблюсти все зависимости между данными.

Понятно, что при описанных допущениях на математическую модель задержка будет определяться информационными зависимостями между итерациями описанного выше цикла. Для нахождения ее нам потребуется построить граф, который будет описывать информационные зависимости между итерациями цикла.

*Определение 5.* Пространством итераций $n$-мерного цикла называется множество всех целочисленных векторов $I = (I_1, I_2, \dots , I_n)$, которые удовлетворяют системе неравенств $L_i \le I_i \le R_i$, где $i = 1\dots n$, а $L_i$, $R_i$ – это левые и правые границы соответствующих циклов.

*Определение 6.* Зафиксируем пару вхождений: генератор и использование. Элементарным решетчатым графом (см. [1]) будем называть граф, у которого множество вершин является пространством итераций, а две вершины соединены дугой, если на итерации, соответствующей первой из них генератором записывается данное, которое будет считано использованием на итерации, соответствующей второй из вершин.

Необходимо отметить, что *вертикальные дуги в элементарном решетчатом графе влиять на задержку не будут*, потому что они определяют зависимости внутри конвейеров, т.е. влияют на *iii*, а не на задержку между стартами конвейеров. Далее будем обозначать этот граф **G** и запись $(x_1; y_1; x_2; y_2)\in\mathbf{G}$ будет означать, что в этом графе есть дуга, ведущая от $(x_1; y_1)$ к $(x_2; y_2)$.

Вначале рассмотрим произвольную не вертикальную дугу графа информационных зависимостей и посмотрим, как она влияет на задержку между стартами конвейеров. Предположим, что эта дуга единственная и пусть ее начало $(i_1; i_2)$, а конец $(j_1; j_2)$. Так как дуга не вертикальная, то $i_1 < j_1$. Предположим, что $i_2 = j_2$. Тогда задержка между стартами конвейеров с номерами $i_1$ и $j_1$ будет равно $T_{it} + T_{send}$ (соглашение 2). Предположим, что $i_2 > j_2$. Тогда задержка между стартами $i_1$ и $j_1$ конвейеров будет равна $T_{it} + T_{send} + i_2 - j_2$. Предположим, что $i_2 < j_2$. Тогда задержка между стартами конвейеров с номерами $i_1$ и $j_1$ будет равна 0, при $j_2 - i_2 \ge T_{it} + T_{send}$, и равна $T_{it} + T_{send} + i_2 - j_2$, при $j_2 - i_2 < T_{it} + T_{send}$.

Теперь введем следующее обозначение: $\mathrm{z}[i_1; j_1]$ – это минимально-допустимая задержка между $i_1$ и $j_1$ конвейерами. Тогда для случая единственной не вертикальной дуги в решетчатом графе справедливо следующее равенство:

$$\mathrm{z}[i_1; j_1] = \max_{\substack{i_2, j_2: \\ (i_1; i_2; j_1; j_2)\in\mathbf{G}}} \begin{cases} T_{it} + T_{send} + i_2 - j_2, & T_{it} + T_{send} + i_2 - j_2 > 0; \\ 0, & T_{it} + T_{send} + i_2 - j_2 \le 0. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\mathrm{w}(x) = \begin{cases} x, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Тогда в новых обозначениях:

$$\mathrm{z}[i_1; j_1] = \max_{\substack{i_2, j_2: \\ (i_1; i_2; j_1; j_2)\in\mathbf{G}}} \mathrm{w}(T_{it} + T_{send} + i_2 - j_2).$$

Отметим, что с учетом соглашения 3 задержка z между стартами соседних конвейеров выражается формулой:

(1) $$\mathrm{z} = \max_{1\le i_1 < j_1 \le N_1} \frac{\mathrm{z}[i_1; j_1]}{j_1 - i_1},$$

причем она ограничена снизу 0 ввиду соглашения 1.

В частном случае, если граф состоит из одной дуги с началом ($i_1$; $i_2$) и концом ($j_1$; $j_2$):

$$z = \frac{w(T_{it} + T_{send} + i_2 - j_2)}{j_1 - i_1}.$$

Соглашение 4, которое еще не было упомянуто, позволяет нам не акцентировать внимание на индексных выражениях в массиве. Если же мы ограничимся прямоугольными пространствами данных, придется в алгоритме поставить дополнительные ограничения на индексные выражения. Более того, для некоторых пар пространство данных - пространство итераций возникнет два вопроса: почему в цикле происходит обращение к ячейке памяти вне прямоугольного пространства данных и какое решение принимать в такой ситуации?

## 1.2. Пример

Пусть дан цикл следующего вида:

```
  Do 10 i1=1,N1
  Do 10 i2=1,N2
  X(i1-i2, 2*i1+i2) = …
10 … =… X(i1-i2+1, i1+i2+1),
```

Граф информационных зависимостей этого цикла (N1=N2=8) изображен на рис. 1. Этот граф показывает, что на 5-ой итерации внешнего цикла существует зависимость от данных полученных на 4-ой итерации внешнего цикла, т.е. работа 5-го конвейера должна быть синхронизирована с работой 4-го конвейера так, чтобы не нарушить логику последовательных вычислений.

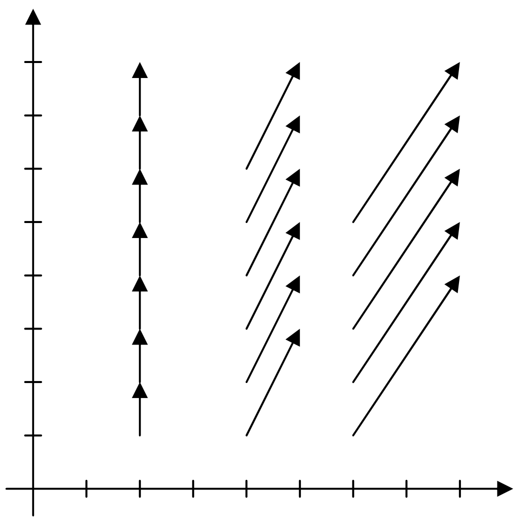

**Рис. 1.** Решетчатый граф для примера из пункта 1.2.

Итак, z[4;5] = w($T_{it}$ + $T_{send}$ – 2), z[6;8] = w($T_{it}$ + $T_{send}$ – 3), для других пар значений $i_1$, $j_1$: z[$i_1$; $j_1$] = 0. Тогда z = w($T_{it}$ + $T_{send}$ – 2).

Вернемся к общей постановке задачи.

Введем в рассмотрение множество $\Delta = \{(x; y) \in Z^2 | \ 0 \le x \le N_1 \ \& \ 0 \le y \le N_2\}$.

Введем в рассмотрение бинарное отношение линейного порядка $\prec$ на множестве $Z^2$ следующим образом: $(i_1; i_2) \prec (j_1; j_2)$ означает либо $i_1 < j_1$, либо $i_1 = j_1$ и $i_2 < j_2$. Будем называть это бинарное отношение лексикографическим сравнением. Пусть $M \subset Z^2$ – конечное множество. Определим $\mathrm{lexmax}(M)$ следующим образом: $\mathrm{lexmax}(M) = I$, где $I \in M$ и для любого $I' \in M$ такого, что $I \neq I'$ выполняется $I' \prec I$. Будем называть эту функцию лексикографическим максимумом.

Пусть генератор на итерации $I = (i_1; i_2)$ обращается к той же ячейке памяти, что и использование на итерации $J = (j_1; j_2)$. Тогда пара $(I; J)$ удовлетворяет системе диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} a_1 i_1 + c_1 i_2 = b_1 j_1 + c_1 j_2 + d_1\,, \\ a_2 i_1 + c_2 i_2 = b_2 j_1 + c_2 j_2 + d_2\,, \end{cases}$$

где $d_1$ = d21 – d11, $d_2$ = d22 – d12, а все остальные параметры системы равны одноименным параметрам цикла, описанного в пункте 1.1. В матричном виде эта система имеет вид:

(2) $$AI = BJ + D,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

С учетом предшествующих обозначений и того, что $I = (i_1; i_2)$ – итерация генератора и $J = (j_1; j_2)$ – итерация использования одной и той же ячейки памяти, в нашей задаче естественными являются следующие ограничения:

(3) $$I, J \in \Delta,\ I \prec J,\ I = \mathrm{lexmax}\ K,$$

где $K$ – множество всех таких $I' \in Z^2$, что $(I'; J)$ – решение системы (2).

Теперь нужно отметить, что *все решения системы* (2)-(3) *задают дуги в решетчатом графе цикла*, описанного в пункте 1.1, причем среди них могут быть и вертикальные тоже. Для поиска решения этой системы, мы рассмотрим пять случаев:

1) $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$.
2) $|A| = 0$, $|B| \neq 0$.
3) $|A| \neq 0$, $|B| = 0$.
4) $|A| = 0$, $|B| = 0$, либо $c_1 \neq 0$, либо $c_2 \neq 0$.
5) $|A| = 0$, $|B| = 0$, $c_1 = c_2 = 0$.

Для каждого из этих пяти случаев мы укажем

- пример, удовлетворяющий условиям данного случая;
- исследование задачи, при ограничениях наложенных условиями данного случая;
- условия существования зависимостей, а, следовательно, и дуг графа зависимостей;
- систему равенств, которая задает решения системы (2)-(3), а значит, задает дуги графа зависимостей;
- задержку между стартами конвейеров.

В связи с тем, что в начале каждого исследованного случая демонстрируется пример, мы рекомендуем читателю, в «сомнительных» на его взгляд ситуациях обращаться к этим примерам.

# 2. Случай $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$

## 2.1. Пример

Рассмотрим двойной цикл с двумя вхождениями следующего вида:

```
  Do 10 i1=1,N1
  Do 10 i2=1,N2
  X(2*i1-i2, i1+i2) = …
10 … =… X(i1-i2, i1+i2),
```

Выпишем систему (2)-(3) для данного примера:

$$\begin{cases} 2i_1 - i_2 = j_1 - j_2\,, \\ i_1 + i_2 = j_1 + j_2\,, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex}\max K. \end{cases}$$

Отметим, что в этом случае, уравнение (2) не может иметь двух разных решений с одинаковыми значениями $J = (j_1; j_2)$, поэтому условие лексикографического максимума в наборе ограничений (3) является избыточным. Итак, приведем последнюю систему к виду:

$$\begin{cases} 2i_1 - i_2 = j_1 - j_2\,, \\ 3i_1 = 2j_1\,, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J. \end{cases}$$

Решим диофантово уравнение из второй строчки:

$$\begin{cases} 2i_1 - i_2 = j_1 - j_2\,, \\ i_1 = 2t\,, \\ j_1 = 3t\,, \quad t \in \mathbf{Z}, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} i_2 - j_2 = t\,, \\ i_1 = 2t\,, \\ j_1 = 3t\,, \quad t \in \mathbf{Z}, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J. \end{cases}$$

Чтобы проиллюстрировать пример рисунком выберем $N_1 = N_2 = 8$. Из всего множества целых чисел необходимо выбрать допустимые значения параметра $t$, т.е. множество целых чисел, удовлетворяющее ограничениям (3). Обозначим через $D = \{t \in Z | \ 1 \le 2t \le 3t \le 8 \ \& \ 1 \le |t| \le 8-1\}$ множество допустимых значений параметра $t$. Тогда $D = \{1; 2\}$. Теперь несложно построить граф информационных зависимостей (см. рис. 2).

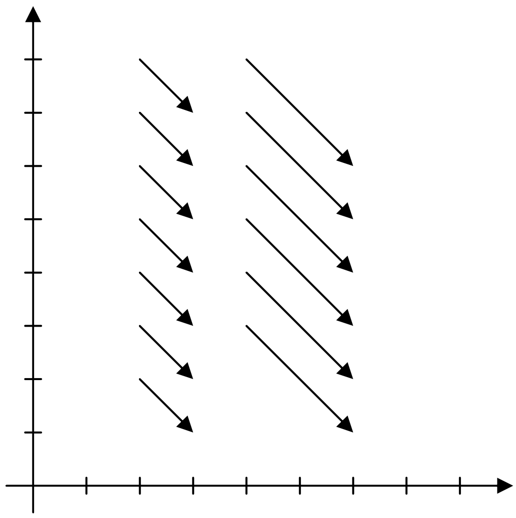

**Рис. 2.** Решетчатый граф для примера из пункта 2.1.

Для того, чтобы вычислить задержку необходимо отобрать те значения параметра $t$, которые с одной стороны относятся только к не вертикальным дугам (т.е. $i_1 < j_1$), а с другой стороны, для которых значения функции $z[i_1; j_1]$ были больше 0 (т.е. $w(T_{it} + T_{send} + i_2 - j_2) > 0$).

Обозначим через $H = D \cap \{t \in Z| \ 2t < 3t \ \& \ T_{it} + T_{send} + t > 0\}$. Тогда $H = \{1; 2\}$, т.к. $T_{it} > 1$. Тогда

$$z = \max \{w(T_{it} + T_{send} + 1); w(T_{it} + T_{send} + 2) \times 0{,}5\} =$$
$$= w(T_{it} + T_{send} + 1).$$

## 2.2. Исследование

Отметим, что в этом случае, уравнение (2) не может иметь двух разных решений с одинаковыми значениями $J = (j_1; j_2)$., поэтому условие лексикографического максимума в наборе ограничений (3) является избыточным.

Очевидным является то, что $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, иначе $|A| = |B| = 0$. Не умаляя общности, предположим, что $c_1 \neq 0$. Тогда мы можем утверждать, что в этом случае систему (2)-(3) с помощью вычитания уравнений можно привести к виду:

$$(4) \qquad \begin{cases} a_1 i_1 + c_1 i_2 = b_1 j_1 + c_1 j_2 + d_1, \\ a_2' i_1 = b_2' j_1 + d_2', \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \end{cases}$$

где $a_2' = c_1 a_2 - c_2 a_1$, $b_2' = c_1 b_2 - c_2 b_1$, $d_2' = c_1 d_2 - c_2 d_1$.

Пусть $\gamma = НОД(a_2'; -b_2')$. Предположим $\dfrac{d_2'}{\gamma} \in Z$, иначе второе уравнение не имеет решений, а значит и вся система (4) решений иметь не будет. Тогда существуют $i_0, j_0 \in Z$ такие, что $a_2' i_0 = b_2' j_0 + d_2'$. Решаем диофантово уравнение во второй строке системы (4):

$$(5)\qquad \begin{cases} a_1 i_1 + c_1 i_2 = b_1 j_1 + c_1 j_2 + d_1, \\ i_1 = i_0 + b_2' t, \\ j_1 = j_0 + a_2' t, \quad t \in \mathrm{Z}, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J. \end{cases}$$

После подстановки выражений для $i_1$ и $j_1$ в первое уравнение, получается:

$$i_2 - j_2 = (a_2 b_1 - a_1 b_2)t + (b_1 j_0 - a_1 i_0 + d_1)/c_1$$

Предположим $b_1 j_0 - a_1 i_0 + d_1$ делиться нацело на $c_1$, иначе последнее уравнение не имеет решений, а значит и вся система (5) решений не имеет.

$$\begin{cases} i_1 = i_0 + b_2' t, \\ j_1 = j_0 + a_2' t, \quad t \in \mathrm{Z}, \\ i_2 = j_2 + \beta(t), \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \end{cases}$$

где $a_2' = c_1 a_2 - c_2 a_1$, $b_2' = c_1 b_2 - c_2 b_1$, $\beta(t) = (a_2 b_1 - a_1 b_2)t + (b_1 j_0 - a_1 i_0 + d_1)/c_1$.

## 2.3. Условия существования дуг в решетчатом графе

*Обозначения:*

$$a_2' = c_1 a_2 - c_2 a_1,\ b_2' = c_1 b_2 - c_2 b_1,\ d_2' = c_1 d_2 - c_2 d_1,$$

$$\exists\ i_0, j_0 \in \mathrm{Z}:\ a_2' i_0 = b_2' j_0 + d_2',$$

$$\beta(t) = (a_2 b_1 - a_1 b_2)t + (b_1 j_0 - a_1 i_0 + d_1)/c_1,$$

$$D = \{t \in \mathrm{Z} \mid 1 \le i_0 + b_2' t \le j_0 + a_2' t \le N_1 \ \&\ 1 \le |\beta(t)| \le N_2 - 1\}$$

*Условия:*

$$(b_1 j_0 - a_1 i_0 + d_1)/c_1 \in \mathrm{Z} \ \&\ D \ne \varnothing\,.$$

## 2.4. Формула вычисления дуг графа

$$\begin{cases} i_1 = i_0 + b_2' t, \\ j_1 = j_0 + a_2' t, \\ i_2 = j_2 + \beta(t), \\ t \in D. \end{cases}$$

## 2.5. Задержка

Рассмотрим выражение:

$$\frac{z[i_1; j_1]}{j_1 - i_1} = \max_{\substack{i_2, j_2: \\ (i_1; i_2; j_1; j_2) \in \mathbf{G}}} \begin{cases} \dfrac{T_{it} + T_{send} + i_2 - j_2}{j_1 - i_1}, & T_{it} + T_{send} + i_2 - j_2 > 0; \\ 0, & T_{it} + T_{send} + i_2 - j_2 \le 0. \end{cases} =$$

$$= \max_{t \in D} \begin{cases} \dfrac{\beta(t) + T_{it} + T_{send}}{j_0 - i_0 + t\,(a_2' - b_2')}, & \beta(t) + T_{it} + T_{send} > 0; \\ 0, & \beta(t) + T_{it} + T_{send} \le 0, \end{cases}$$

где $i_1 < j_1$.

Так как нас интересует максимум этого выражения, то нас интересуют только $t \in H \subset D$, где $H = D \cap \{t \in Z \mid i_0 + b_2' t < j_0 + a_2' t \;\&\; T_{it} + T_{send} + \beta(t) > 0\}$. Отметим также, что в числителе и знаменателе линейные по $t$ функции. Так как множество $D$ – конечно, то и множество $H$ тоже конечно. Тогда существуют минимальный и максимальный элементы во множестве $H$, если оно не пусто. Пусть $t_{\min} \le t \le t_{\max}$, для любого $t \in H$.

Рассмотрим дробно-линейную функцию $h(t) = (q_1 t + p_1)/(q_2 t + p_2)$ с вещественным аргументом $t \in [t_{\min}; t_{\max}]$, обладающую следующим свойством: $-p_2/q_2 \notin [t_{\min}; t_{\max}]$. Отметим, что

i) функция $h(t)$, на отрезке $t \in [t_{\min}; t_{\max}]$ монотонна (либо возрастает либо убывает в зависимости от знака числа $q_1 p_2 - q_2 p_1$).

ii) функция $h(t)$, на отрезке $t \in [t_{\min}; t_{\max}]$ непрерывна.

Рассмотрим дробно-линейную функцию $g(t) = (\beta(t) + T_{it} + T_{send})/(j_0 - i_0 + t(a_2' - b_2'))$ с вещественным аргументом $t \in [t_{\min}; t_{\max}]$, т.к. $j_0 - i_0 + t(a_2' - b_2') > 0$, $t \in H$. Из свойств i, ii следует, что на отрезке $t \in [t_{\min}; t_{\max}]$: $\max g(t) = \max \{g(t_{\min}); g(t_{\max})\}$. Тогда на множестве $t \in H$: $\max g(t) = \max \{g(t_{\min}); g(t_{\max})\}$.

Итак,

$$\max_{1 \le i_1 < j \le N_1} \frac{z[i_1; j_1]}{j_1 - i_1} = \max\{g(t_{\min}); g(t_{\max})\},$$

следовательно,

$$z = \begin{cases} \max\left\{ \dfrac{\beta(t_{\min}) + t_e}{j_0 - i_0 + (a_2' - b_2')t_{\min}}; \dfrac{\beta(t_{\max}) + t_e}{j_0 - i_0 + (a_2' - b_2')t_{\max}} \right\}, & H \ne \phi, \\ 0, & H = \phi. \end{cases}$$

# 3. Случай $|A| = 0$, $|B| \ne 0$

## 3.1. Пример

Рассмотрим двойной цикл с двумя вхождениями следующего вида:

```
   Do 10 i1=1,N1
   Do 10 i2=1,N2
   X(i1-i2, 1) = …
10 … =… X(2*i1-i2-8, i1-3),
```

Выпишем систему (2)-(3) для данного примера:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 = 2j_1 - j_2 - 8, \\ 0 = j_1 - 4, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex}\max K, \end{cases}$$

где $K$ – множество всех таких $I' \in Z^2$,что $(I'; J)$ – решение системы (2).

Пусть $i_1 = 4 - k$, $0 \le k \le N_1$. Тогда

$$\begin{cases} i_1 - i_2 = 2j_1 - j_2 - 8, \\ j_1 = 4, \\ i_1 = 4 - k, \\ 0 \le k \le N_1, \quad I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex}\max K, \end{cases}$$

Подставим второе и третье уравнение в первое:

$$\begin{cases} i_2 - j_2 = 4 - k, \\ j_1 = 4, \\ i_1 = 4 - k, \\ 0 \le k \le N_1, \quad I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex}\max K, \end{cases}$$

Обозначим через $\beta(k) = i_2 - j_2 = 4 - k$. Введем в рассмотрение следующие множества:

$$D_0 = \{j \in Z \cap [1; N_2] |\ \beta(0) < 0\ \&\ j + \beta(0) \in j \in Z \cap [1; N_2]\},$$

$$D_k = \{j \in Z \cap [1; N_2] |\ \alpha - k \in Z \cap [1; N_1]\ \&\ j + \beta(k) \in Z \cap [1; N_2]\} \backslash \left( \bigcup_{s=0}^{k-1} D_s \right),$$

для всех $k$ удовлетворяющих условию $1 \le k \le N_1$

Найдем $D_0$:

$D_0 = \varnothing$

Найдем $D_1$:

$D_1 = \{j \in Z \cap [1; 8] |\ 4 - 1 \in Z \cap [1; 8]\ \&\ j + 4 - 1 \in Z \cap [1; 8]\} \backslash D_0 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Найдем $D_2$:

$D_2 = \{j \in Z \cap [1; 8] |\ 4 - 2 \in Z \cap [1; 8]\ \&\ j + 4 - 2 \in Z \cap [1; 8]\} \backslash (D_0 \cup D_1) = \{6\}$

Найдем $D_3$:

$D_3 = \{j \in Z \cap [1; 8] |\ 4 - 3 \in Z \cap [1; 8]\ \&\ j + 4 - 3 \in Z \cap [1; 8]\} \backslash (D_0 \cup D_1 \cup D_2) = \{7\}$

Отметим, что для любого $k \ge 4$ выражение $4 - k \le 0$, следовательно $D_k = \varnothing$, при $k \ge 4$. Теперь мы можем описать все решения нашей задачи следующим образом:

$$\bigcup_{k \in H} \begin{cases} i_1 = 4 - k, \\ j_1 = 4, \\ i_2 = j_2 + \beta(k), \\ j_2 \in D_k, \end{cases}$$

где $H = \{k \in N \cup \{0\} |\ D_k \ne \varnothing \} = \{1; 2; 3\}$.

Тогда

$$\begin{cases} i_1 = 3, \\ j_1 = 4, \\ i_2 = j_2 + 3, \\ j_2 \in \{1,2,3,4,5\}, \end{cases} \bigcup \begin{cases} i_1 = 2, \\ j_1 = 4, \\ i_2 = j_2 + 2, \\ j_2 \in \{6\}, \end{cases} \bigcup \begin{cases} i_1 = 1, \\ j_1 = 4, \\ i_2 = j_2 + 1, \\ j_2 \in \{7\}. \end{cases}$$

Теперь несложно построить граф информационных зависимостей (см. рис. **3**). Далее для вычисления задержки необходимо воспользоваться формулой (1):

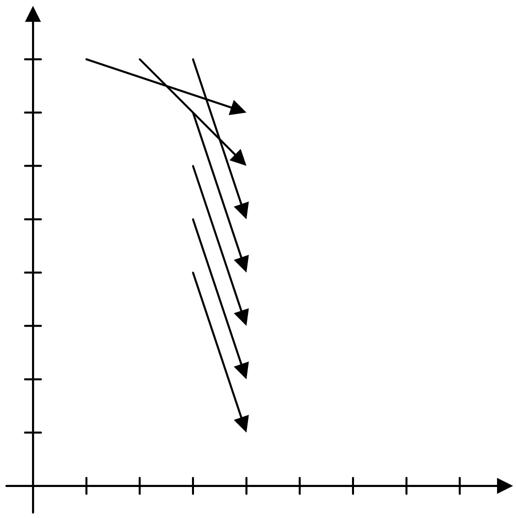

**Рис. 3.** Решетчатый граф для примера из пункта 3.1.

$$z = \max\{w(T_{it} + T_{send} + 3);\ w(T_{it} + T_{send} + 2)/2;\ w(T_{it} + T_{send} + 1)/3\} = w(T_{it} + T_{send} + 3).$$

## 3.2. Исследование

Очевидным является то, что $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, иначе $|B| = 0$. Не умаляя общности, предположим, что $c \neq 0$. Тогда мы можем утверждать, что в этом случае систему (2)-(3) с помощью вычитания уравнений можно привести к виду с 0-строкой в матрице $A$:

$$\begin{cases} a_1 i_1 + c_1 i_2 = b_1 j_1 + c_1 j_2 + d_1 \\ \qquad\quad 0 = b_2 j_1 + d_2 \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex\,max} K, \end{cases}$$

где $K$ – множество всех таких $I' \in Z^2$,что $(I'; J)$ – решение системы (2). Коэффициент при переменной $j_2$ во втором уравнении равен 0 вследствие того, что он должен быть равен коэффициенту при $i_2$, так как был ему равен до преобразования системы (2).

Пусть $\alpha = -d_2/b_2$, следовательно, $j_1 = \alpha$. Тогда система не имеет решений, если $\alpha \notin Z \cap [1; N_1]$.

Введем следующее обозначение: пусть $k$ такое число, что $i_1 = \alpha - k$, $0 \leq k < N_1$. Тогда первое уравнение можно записать в виде:

$$a_1(\alpha - k) + c_1 i_2 = b_1\alpha + c_1 j_2 + d_1 \Leftrightarrow c_1(i_2 - j_2) = (b_1 - a_1)\alpha + d_1 + a_1 k$$

Пусть $\beta(k) = ((b_1 - a_1)\alpha + d_1 + a_1 k)/c_1$. Тогда система не имеет решений, если для любого $0 < k < N_1$ выполняется $\beta(k) \notin Z \cap [-N_2; N_2]$ и $\beta(0) \notin Z \cap [-N_2 + 1; -1]$.

С учетом новых обозначений получаем:

$$(6)\qquad \begin{cases} i_1 = \alpha - k \\ j_1 = \alpha \\ i_2 = j_2 + \beta(k) \\ 0 \le k < N_1, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex}\max K, \end{cases}$$

где $K$ – множество всех таких $I' \in Z^2$,что $(I'; J)$ – решение системы (2). Чтобы систему (6) избавить от использования лексикографического максимума необходимо ввести систему множеств $\{D_k\}$, $0 \le k \le N_1$:

$$D_0 = \{j \in Z \cap [1; N_2] \mid \beta(0) < 0 \ \&\ j + \beta(0) \in j \in Z \cap [1; N_2]\},$$

$$D_k = \{j \in Z \cap [1; N_2] \mid \alpha - k \in Z \cap [1; N_1] \ \&\ j + \beta(k) \in Z \cap [1; N_2]\} \setminus \left( \bigcup_{s=0}^{k-1} D_s \right),$$

для всех $k$ удовлетворяющих условию $1 \le k \le N_1$

Отметим, что если при $k = 0$ есть решения системы, то граф информационных зависимостей имеет вертикальные дуги, при $\beta(k) < 0$.

## 3.3. Условия существования графа

*Обозначения:*

$$\alpha = -d_2/b_2,\ \beta(k) = ((b_1 - a_1)\alpha + d_1 + a_1 k)/c_1$$

$$D_0 = \{j \in Z \cap [1; N_2] \mid \beta(0) < 0 \ \&\ j + \beta(0) \in j \in Z \cap [1; N_2]\},$$

$$D_k = \{j \in Z \cap [1; N_2] \mid \alpha - k \in Z \cap [1; N_1] \ \&\ j + \beta(k) \in Z \cap [1; N_2]\} \setminus \left( \bigcup_{s=0}^{k-1} D_s \right),$$

для всех $k$ удовлетворяющих условию $1 \le k \le N_1$

$$D = \cup D_k,\ 0 \le k < N_1.$$

На практике рекомендуется перебрать $j \in Z \cap [1; N_2]$ и в первую очередь построить разбиение на $D_k$ в соответствии с определением этой системы множеств.

*Условия:*

$$\alpha \in Z \cap [1; N_1],\ D \neq \varnothing.$$

## 3.4. Формула вычисления дуг графа

$$\bigcup_{k \in H} \begin{cases} i_1 = \alpha - k, \\ j_1 = \alpha, \\ i_2 = j_2 + \beta(k), \\ j_2 \in D_k. \end{cases}$$

где $H = \{k \in N \cup \{0\} \mid D_k \neq \varnothing\}$.

Ввиду того, что сказано в пункте 3.3, множество $H$ – конечно.

## 3.5. Задержка

Рассмотрим выражение:

$$\frac{z[i_1; j_1]}{j_1 - i_1} = \max_{\substack{i_2, j_2: \\ (i_1; i_2; j_1; j_2) \in \mathbf{G}}} \begin{cases} \dfrac{T_{it} + T_{send} + i_2 - j_2}{j_1 - i_1}, & t_e + i_2 - j_2 > 0; \\ 0, & t_e + i_2 - j_2 \le 0. \end{cases} =$$

$$= \max_{k \in H \setminus \{0\}} \begin{cases} \dfrac{\beta(k) + T_{it} + T_{send}}{k}, & \beta(k) + t_e > 0; \\ 0, & \beta(k) + t_e \le 0. \end{cases}$$

Пусть $k_{\min} \le k \le k_{\max}$, для любого $k \in H$. Так как нас интересует максимум выражения $\mathrm{z}[i_1; j_1]/(j_1 - i_1)$, то мы можем воспользоваться вспомогательными результатами, рассмотренными в пункте «Задержка» для случая $|A| \ne 0$, $|B| \ne 0$.

Обозначим через,

$$z_1 = \frac{\mathrm{w}(\beta(k_{\min}) + T_{it} + T_{send})}{k_{\min}},$$

$$z_2 = \frac{\mathrm{w}(\beta(k_{\max}) + T_{it} + T_{send})}{k_{\max}}.$$

Итак,

$$\max_{1 \le i_1 < j_1 \le N_1} \frac{\mathrm{z}[i_1; j_1]}{j_1 - i_1} = \max\{z_1; z_2\},$$

следовательно,

$$\mathrm{z} = \begin{cases} \max\{z_1; z_2\}, & G \setminus \{0\} \ne \phi \\ 0, & G \setminus \{0\} = \phi \end{cases}$$

# 4. Случай $|A| \ne 0$, $|B| = 0$

## 4.1. Пример

Рассмотрим двойной цикл с двумя вхождениями массива X[ , ]:

```
  Do 10 i1 = 1,8
  Do 10 i2 = 1,8
  X(i1+2*i2, i1-3) = …
10 … = … X(3*i1+2*i2-5, 1) …
```

Выпишем систему (2)-(3) для данного примера:

$$\begin{cases} i_1 + 2i_2 = 3j_1 + 2j_2 - 5, \\ i_1 = 4, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex}\max K, \end{cases}$$

где $K$ – множество всех таких $I' \in \mathrm{Z}^2$,что $(I'; J)$ – решение системы (2).

Отметим, что в этом случае, уравнение (2) не может иметь двух разных решений с одинаковыми значениями $J = (j_1; j_2)$, поэтому условие лексикографического максимума в наборе ограничений (3) является избыточным.

Пусть $j_1 = 4 + k$, $0 \le k \le N_1$. Введем в рассмотрение множество $D = \{k > 0 |\ 4 + k \in \mathrm{Z} \cup [1; 8]\}$. Тогда

$$\begin{cases} i_1 + 2i_2 = 3j_1 + 2j_2 - 5, \\ i_1 = 4, \\ j_1 = 4 + k, \\ 0 \le k < 8, \quad I, J \in \Delta, \quad I \prec J. \end{cases}$$

Подставим второе и третье уравнение в первое:

$$\begin{cases} 2(i_2 - j_2) = 3 + 3k, \\ i_1 = 4, \\ j_1 = 4 + k, \\ 0 \le k < 8, \quad I, J \in \Delta, \quad I \prec J. \end{cases}$$

Обозначим через β($k$) = 1,5(1 + $k$). Введем в рассмотрение следующее множество:

$$H = \{k \in \mathrm{N} |\ 4 + k \in \mathrm{Z} \cup [1; 8]\ \&\ |\beta(k)| \in \mathrm{Z} \cup [1; 8 - 1]\} \cap$$
$$\cap\ \{k \in \{0\} |\ \beta(k) \in \mathrm{Z} \cup [-7; -1]\} = \{1; 3\}$$

Тогда

$$\begin{cases} i_1 = 4, \\ j_1 = 4 + k, \\ i_2 - j_2 = 1{,}5(1 + k) \\ k \in \{1{,}3\}, \quad I, J \in \Delta. \end{cases}$$

Теперь несложно построить граф информационных зависимостей (см. рис. 4).

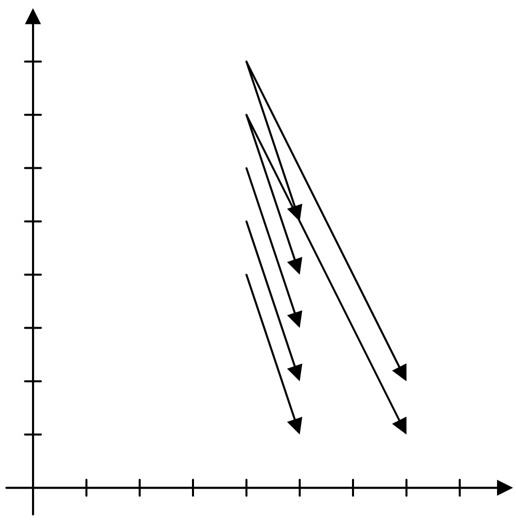

**Рис. 4.** Решетчатый граф для примера из пункта 4.1.

Далее для вычисления задержки необходимо воспользоваться формулой (1):

$$z = \max\ \{w(3 + T_{it} + T_{send});\ w(6 + T_{it} + T_{send})/3\} = w(3 + T_{it} + T_{send}).$$

## 4.2. Исследование

Отметим, что в этом случае, уравнение (2) не может иметь двух разных решений с одинаковыми значениями $J = (j_1; j_2)$, поэтому условие лексикографического максимума в наборе ограничений (3) является избыточным.

Очевидным является то, что $c_1^2 + c_2^2 \ne 0$, иначе $|A| = 0$. Не умаляя общности, предположим, что $c_1 \ne 0$. Тогда мы можем утверждать, что в этом случае систему (2)-(3) с помощью вычитания уравнений можно привести к виду с 0-строкой в матрице $B$:

(7) $$\begin{cases} a_1 i_1 + c_1 i_2 = b_1 j_1 + c_1 j_2 + d_1, \\ a_2 i_1 = d_2, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \end{cases}$$

где $K$ – множество всех таких $I' \in Z^2$,что $(I'; J)$ – решение системы (2). Коэффициент при переменной $i_2$ во втором уравнении равен 0 по тем же причинам, что и в случае $|A| = 0$, $|B| \neq 0$.

Пусть $\alpha = d_2/a_2$, следовательно $i_1 = \alpha$. Тогда система не имеет решений, если $\alpha \notin Z \cup [1; N_1]$.

Пусть $D = \{k > 0 |\ \alpha + k \in Z \cap [1; N_1]\}$. Если $D = \varnothing$, то решений системы (7) нет. Предположим, что $D \neq \varnothing$. Пусть $j_1 = \alpha + k$, $k \in D$. Тогда первое уравнение можно записать в виде:

$$a_1\alpha + c_1 i_2 = b_1(\alpha + k) + c_1 j_2 + d_1$$

следовательно,

$$c_1(i_2 - j_2) = (b_1 - a_1)\alpha + d_1 + b_1 k$$

Пусть $\beta(k) = ((b_1 - a_1)\alpha + d_1 + b_1 k)/c_1$. Тогда система не имеет решений, если для любого $k > 0$: $|\beta(k)| \notin Z \cup [1; N_2]$.

Теперь систему (7) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} i_1 = \alpha, \\ j_1 = \alpha + k, \\ i_2 = j_2 + \beta(k), \\ k > 0, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \end{cases}$$

где $K$ – множество всех таких $I' \in Z^2$,что $(I'; J)$ – решение системы (2).

Отметим, что различным $k > 0$ могут соответствовать различные решения этой системы, что легко увидеть на приведенном выше примере.

## 4.3. Условия существования дуг графа

*Обозначения:*

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{d_2}{a_2}, \\ \beta(k) = \dfrac{(b_1 - a_1)\alpha + d_1 + b_1 k}{c_1}, \\ D = \{k > 0 |\ \alpha + k \in Z \cap [1; N_2]\}, \\ H_0 = D \cap \{k \in \{0\} |\ \beta(k) \in Z \cap [-N_2 + 1; -1]\}, \\ H = D \cap \left(H_0 \cup \{k \in N |\ |\beta(k)| \in Z \cap [1; N_2 - 1]\}\right). \end{cases}$$

*Условия:*

$$\begin{cases} \alpha \in Z \cap [1; N_1], \\ H \neq \phi. \end{cases}$$

Отметим, что условие $D \neq \varnothing$ будет выполняться автоматически, при $H \neq \varnothing$.

### 4.4. Формула вычисления дуг графа

$$\begin{cases} i_1 = \alpha, \\ j_1 = \alpha + k, \\ i_2 = j_2 + \beta(k), \\ k \in H, \\ i_2, j_2 \in \mathrm{Z} \bigcap [1; N_2]. \end{cases}$$

### 4.5. Задержка

Рассмотрим выражение:

$$\frac{\mathrm{z}[i_1; j_1]}{j_1 - i_1} = \max_{\substack{i_2, j_2: \\ (i_1; j_1; i_2; j_2) \in \mathbf{G}}} \frac{w(i_2 - j_2 + T_{it} + T_{send})}{j_1 - i_1} = \frac{w(\beta(k) + T_{it} + T_{send})}{k}$$

где $k \in H \setminus \{0\}$.

Пусть $k_{\min}$, $k_{\max}$ такие числа, что $k_{\min} \le k \le k_{\max}$, для любого $k \in H \setminus \{0\}$. Так как нас интересует максимум выражения $\mathrm{z}[i_1; j_1]/(j_1 - i_1)$, то мы можем воспользоваться свойствами функций, описанными в пункте «Задержка» для случая $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$.

Обозначим через,

$$z_1 = \frac{w(\beta(k_{\min}) + T_{it} + T_{send})}{k_{\min}},$$

$$z_2 = \frac{w(\beta(k_{\max}) + T_{it} + T_{send})}{k_{\max}}.$$

Итак,

$$\max_{1 \le i_1 < j_1 \le N_1} \frac{z[i_1; j_1]}{j_1 - i_1} = \max\{z_1; z_2\},$$

следовательно,

$$z = \begin{cases} \max\{z_1; z_2\}, & H \setminus \{0\} \neq \phi \\ 0, & H \setminus \{0\} = \phi \end{cases}$$

## 5. Случай $|A| = 0$, $|B| = 0$, либо $c_1 \neq 0$ либо $c_2 \neq 0$

### 5.1. Пример

```
    Do i1=1,8
    Do i2=1,8
    X(2*i1+i2, 1) = …
10  … = … X(i1+i2+4, 1) …
```

Выпишем систему (2)-(3) для данного примера:

$$\begin{cases} 2i_1 + i_2 = j_1 + j_2 + 4, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex}\max K, \end{cases} \tag{8}$$

где $K$ – множество всех таких $I' \in \mathrm{Z}^2$,что $(I'; J)$ – решение системы (2).

Обозначим через $k = j_1 - i_1$. Обозначим через $\beta(k, j_1) = 2k - 5 - j_1$. Тогда систему (8) можно привести к виду:

$$\begin{cases} j_1 - i_1 = k, \\ i_2 - j_2 = 2k + 4 - j_1, \\ 0 \le k < 8, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \text{lex}\max K. \end{cases}$$

Построим следующую систему множеств:

$$D_0 = \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_2 + \beta(0, j_1) \in \mathrm{Z} \cap [1; j_2 - 1]\},$$

$$T_k = \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_1 - k \in \mathrm{Z} \cap [1; N_1] \,\&\, j_2 + \beta(k, j_1) \in \mathrm{Z} \cap [1; N_2]\},$$

$$D_k = T_k \setminus \left( \bigcup_{s=0}^{k-1} D_s \right), \text{ где } 0 \le k < N_1.$$

Найдем $D_0$:

$$D_0 = \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_2 - j_1 + 4 \in \mathrm{Z} \cap [1; j_2 - 1]\} =$$
$$= \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_1 = 5 \,\&\, 2 \le j_2 \le 8\} \cup \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_1 = 6 \,\&\, 3 \le j_2 \le 8\} \cup$$
$$\cup \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_1 = 7 \,\&\, 4 \le j_2 \le 8\} \cup \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_1 = 8 \,\&\, 5 \le j_2 \le 8\}.$$

Найдем $D_1$:

$$D_1 = \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_1 - 1 \in \mathrm{Z} \cap [1; N_1] \,\&\, j_2 - j_1 + 6 \in \mathrm{Z} \cap [1; N_2]\} \setminus D_0 =$$
$$= \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_1 = 2 \,\&\, 1 \le j_2 \le 4\} \cup \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_1 = 3 \,\&\, 1 \le j_2 \le 5\} \cup$$
$$\cup \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_1 = 4 \,\&\, 1 \le j_2 \le 6\} \cup$$
$$\cup \{(5;1), (6;1), (6;2), (7;2), (7;3), (8;3), (8;4)\}.$$

Найдем $D_2$:

$$D_2 = \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_1 - 2 \in \mathrm{Z} \cap [1; N_1] \,\&\, j_2 - j_1 + 8 \in \mathrm{Z} \cap [1; N_2]\} \setminus$$
$$\setminus (D_0 \cup D_1) = \{(7;1), (8,1), (8,2)\}.$$

Введем также следующую последовательность множеств:

$$\overline{D}_k = \{j_1 \in \mathrm{Z} \cap [1; N_1] \mid \exists j_2 \in \mathrm{Z} \cap [1; N_2] : (j_1; j_2) \in D_k\}, \text{ где } 0 \le k < N_1.$$

Найдем $\overline{D}_0, \overline{D}_1, \overline{D}_2$:

$$\overline{D}_0 = \{5,6,7,8\}, \overline{D}_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \overline{D}_2 = \{7,8\}:$$

Тогда решения имеют вид:

$$\bigcup_{0 \le k < N_1} \begin{cases} j_1 \in \overline{D}_k, \\ i_1 = j_1 - k, \\ i_2 = j_2 + 2k + 4 - j_1. \end{cases}$$

Теперь несложно построить граф информационных зависимостей (см. рис. 5).

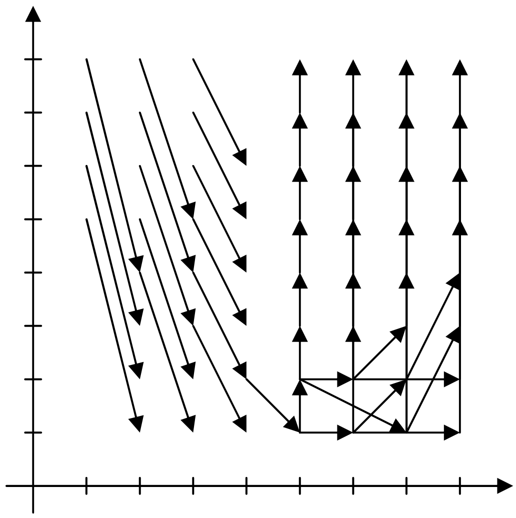

**Рис 5.** Решетчатый граф для примера из пункта 5.1.

Далее для вычисления задержки необходимо воспользоваться формулой (1):

$$z = \max\left\{\max_{j_1 \in D_1} \frac{w(6 - j_1 + T_{it} + T_{send})}{1}; \max_{j_1 \in D_2} \frac{w(8 - j_1 + T_{it} + T_{send})}{2}\right\} =$$

$$= w(5 + T_{it} + T_{send})$$

## 5.2. Исследование

Предположим $c_1 \neq 0$. Тогда систему (2)-(3) с помощью вычитания уравнений с коэффициентом $c_2/c_1$ можно привести к виду:

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} a_1 i_1 + c_1 i_2 = b_1 j_1 + c_1 j_2 + d_1, \\ 0 = d_2 - \dfrac{c_2}{c_1} d_1, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex}\max K. \end{cases}$$

где $K$ – множество всех таких $I' \in Z^2$,что $(I'; J)$ – решение системы (2). Коэффициенты при $i_1, j_1$ во втором уравнении необходимо будут равны нулю ввиду того, что $|A| = 0$, $|B| = 0$.

Предположим, что $d_2 - d_1 c_2/ c_1 = 0$. Очевидно, что для любого решения системы (9) выполняется: $i_1 = j_1 - k$, $0 \leq k < N_1$. Далее в этом пункте под $k$ будем понимать, введенное таким образом число.

Обозначим через $\beta(k, j_1) = (a_1 k + d_1 + (b_1 - a_1) j_1)/c_1$. Тогда систему (9) можно привести к виду:

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} j_1 - i_1 = k, \\ i_2 - j_2 = \beta(k, j_1) \\ 0 \leq k < N_1 \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex}\max K, \end{cases}$$

где $K$ – множество всех таких $I' \in Z^2$,что $(I'; J)$ – решение системы (2).

Теперь нам необходимо избавиться от условия лексикографического максимума. Для этого введем, как и в случае $|A| = 0$, $|B| \neq 0$, последовательность множеств, следующим образом:

$$D_0 = \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_2 + \beta(0, j_1) \in Z \cap [1; j_2 - 1]\},$$
$$T_k = \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_1 - k \in Z \cap [1; N_1] \;\&\; j_2 + \beta(k, j_1) \in Z \cap [1; N_2]\},$$
$$D_k = T_k \setminus \left( \bigcup_{s=0}^{k-1} D_s \right), \text{ где } 0 \le k < N_1.$$

Введем также следующую последовательность множеств:

$$\overline{D}_k = \{ j_1 \in Z \cap [1; N_1] \mid \exists j_2 \in Z \cap [1; N_2] : (j_1; j_2) \in D_k \}, \text{ где } 0 \le k < N_1.$$

Отметим, что при фиксированном значении переменной $k$ и $j_1 \in \overline{D}_k$ условие $I = \text{lex max } K$ в системе (10) будет избыточным, также как и остальные условия из набора (3). Тогда систему (10) можно привести к виду:

$$(11) \qquad \bigcup_{0 \le k < N_1} \begin{cases} j_1 \in \overline{D}_k, \\ i_1 = j_1 - k, \\ i_2 = j_2 - \beta(k, j_1) \end{cases}$$

## 5.3. Условия существования дуг графа

*Обозначения*:

$$\begin{cases} \beta(k, j_1) = \dfrac{a_1 k + d_1 + (b_1 - a_1) j_1}{c_1} \\ D_0 = \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_2 + \beta(0, j_1) \in Z \cap [1; j_2 - 1]\} \\ T_k = \{(j_1; j_2) \in \Delta \mid j_1 - k \in Z \cap [1; N_1] \;\&\; j_2 + \beta(k, j_1) \in Z \cap [1; N_2]\} \\ D_k = T_k \setminus \left( \bigcup_{s=0}^{k-1} D_s \right) \\ \overline{D}_k = \{ j_1 \in Z \cap [1; N_1] \mid \exists j_2 \in Z \cap [1; N_2] : (j_1; j_2) \in D_k \}, \quad \text{где } 0 \le k < N_1 \end{cases}$$

*Условия*:

$$\bigcup_{0 \le k < N_1} D_k \neq \phi$$

## 5.4. Формула вычисления дуг графа

Смотри формулу (11).

## 5.5. Задержка

Рассмотрим выражение:

$$\frac{z[i_1; j_1]}{j_1 - i_1} = \max_{\substack{i_2, j_2: \\ (i_1; j_1; i_2; j_2) \in \mathbf{G}}} \frac{w(i_2 - j_2 + T_{it} + T_{send})}{j_1 - i_1} = \frac{w(\beta(k, j_1) + T_{it} + T_{send})}{k}$$

где $k > 0$, $\quad j_1 \in \overline{D}_k$.

Обозначим через $H = \{ k \in Z \cap [1; N_1] \mid \overline{D}_k \neq \phi \}$. Теперь отметим, что

$$z = \max_{1 \le i_1 < j_1 \le N_1} \frac{z[i_1; j_1]}{j_1 - i_1} = \max_{k \in H} \max_{j_1 \in \overline{D}_k} \frac{\mathrm{w}\left(\beta\left(k, j_1\right) + T_{it} + T_{send}\right)}{k}$$

# 6. Случай $|A| = 0$, $|B| = 0$, $c_1 = c_2 = 0$

## 6.1. Пример

```
      Do 10 i1=1,8
      Do 10 i2=1,8
      X(i1, 2*i1) = …
10    … = … X(i1-3, 2*i1-6) …
```

Выпишем систему (2)-(3) для данного примера:

$$\begin{cases} i_1 = j_1 - 3, \\ 2i_1 = 2j_1 - 6, \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex}\max K, \end{cases}$$

где $K$ – множество всех таких $I' \in Z^2$,что $(I'; J)$ – решение системы (2).

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} i_1 = j_1 - 3 \\ 2i_1 = 2j_1 - 6 \end{cases}$$

Обозначим множество решений системы этой системы через $D$. Введем следующие два множества:

$$D_= = \left\{ \left(i_1, j_1\right) \in D \,\middle|\, 1 \le i_1 = j_1 \le N_1 \right\},$$
$$D_< = \left\{ \left(i_1, j_1\right) \in D \,\middle|\, 1 \le i_1 < j_1 \le N_1 \right\},$$

В данном примере $D_= = \varnothing$. На следующем рисунке изображен решетчатый граф для данного пример.

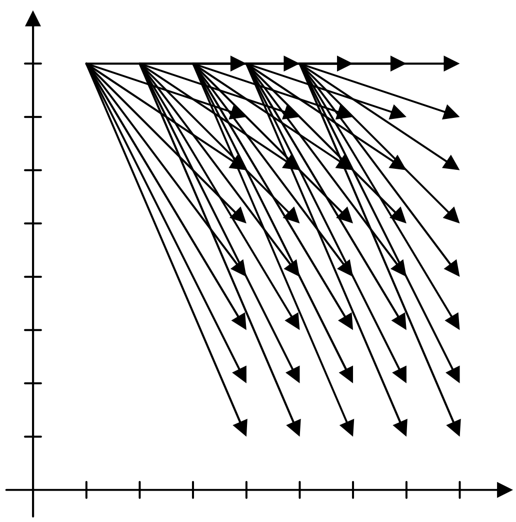

**Рис 6.** Решетчатый граф для примера из пункта 6.1.

Задержка z = w($N_2$ - 1 + $T_{\text{it}}$ + $T_{\text{send}}$ )/3.

## 6.2. Исследование

В этом случае система (2)-(3) принимает вид:

$$\begin{cases} a_1 i_1 = b_1 j_1 + d_1 \\ a_2 i_2 = b_2 j_2 + d_2 \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex}\max K, \end{cases}$$

где $K$ – множество всех таких $I' \in Z^2$,что ($I'$; $J$) – решение системы (2).

Рассмотрим систему уравнений следующего вида:

(12) $$\begin{cases} a_1 i_1 = b_1 j_1 + d_1 \\ a_2 i_1 = b_2 j_1 + d_2 \end{cases}$$

В целых числах система (12) имеет 0, 1 или бесконечное множество решений. Обозначим множество решений системы (12) через $D$. Как найти это множество, мы считаем очевидным, и задерживать внимание читателя на этом не будем.

Введем следующие два множества:

$$D_= = \{(i_1, j_1) \in D \mid 1 \le i_1 = j_1 \le N_1\},$$
$$D_< = \{(i_1, j_1) \in D \mid 1 \le i_1 < j_1 \le N_1\},$$

Таким образом, система (12) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} (i_1, j_1) \in D_= \bigcup D_< \\ I, J \in \Delta, \quad I \prec J, \quad I = \operatorname{lex}\max K, \end{cases}$$

Теперь избавимся от условия лексикографического максимума и получим объединение следующих систем:

(13) $$\begin{cases} (i_1, j_1) \in D_= \\ i_2 = j_2 - 1 \\ 2 \le j_2 \le N_2 \end{cases} \bigcup \begin{cases} (i_1, j_1) \in D_< \\ i_2 = N_2 \\ 1 \le j_2 \le N_2 \end{cases}$$

## 6.3. Условия существования графа

*Обозначения:*

$D$ – множество решений системы (12).

$$D_= = \{(i_1, j_1) \in D \mid 1 \le i_1 = j_1 \le N_1\},$$
$$D_< = \{(i_1, j_1) \in D \mid 1 \le i_1 < j_1 \le N_1\},$$

*Условия:*

$$D_= \bigcup D_< \ne \phi$$

## 6.4. Формула вычисления дуг графа

Смотри формулу (13).

## 6.5. Задержка

Рассмотрим выражение:

$$\frac{z[i_1; j_1]}{j_1 - i_1} = \max_{\substack{i_2, j_2: \\ (i_1; j_1; i_2; j_2) \in \mathbf{G}}} \begin{cases} \dfrac{i_2 - j_2 + T_{it} + T_{send}}{j_1 - i_1}, & i_2 - j_2 + T_{it} + T_{send} > 0 \\ 0, & i_2 - j_2 + T_{it} + T_{send} \le 0 \end{cases} =$$

$$= \max_{\substack{i_2, j_2: \\ (i_1; j_1; i_2; j_2) \in \mathbf{G}}} \begin{cases} \dfrac{N_2 - 1 + T_{it} + T_{send}}{j_1 - i_1}, & N_2 - 1 + T_{it} + T_{send} > 0 \\ 0, & N_2 - 1 + T_{it} + T_{send} \le 0 \end{cases}$$

где $(i_1; j_1) \in D_<$.

Теперь отметим, что

$$z = \max_{1 \le i_1 < j_1 \le N_1} \frac{z[i_1; j_1]}{j_1 - i_1} = \begin{cases} \max\limits_{(i_1, j_1) \in D_<} \dfrac{\mathrm{w}(N_2 - 1 + T_{it} + T_{send})}{j_1 - i_1}, & D_< \ne \phi \\ 0, & D_< = \phi \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\mathrm{w}(N_2 - 1 + T_{it} + T_{send})}{\min\limits_{(i_1, j_1) \in D_<} (j_1 - i_1)}, & D_< \ne \phi \\ 0, & D_< = \phi \end{cases}$$

Отметим, что множество $D$ может содержать 0, 1 или бесконечно много элементов (ввиду определения множеств $D$), в зависимости от коэффициентов в системе уравнений (12). В случае $|D| = 1$, единственный элемент этого множества вычисляется по формулам из линейной алгебры, остается только проверить его принадлежность множеству $D_<$.

В случае $|D| = \infty$ ясно, что все точки множества $D_<$ принадлежат одной прямой $a_1 i_1 = b_1 j_1 + d_1$. Предположим, что множество $D_<$ упорядочено по возрастанию $i_1$ (это возможно в случае $b_1 \ne 0$). Тогда все точки этого множества принадлежат отрезку, соединяющему первую и последнюю точки этого множества. Для того чтобы найти $\min \{j_1 - i_1\}$, $(i_1; j_1) \in D_<$ достаточно определить на упомянутом отрезке самую близкую точку к прямой $j_1 = i_1$. Понятно, что это будет один из концов этого отрезка. По углу наклона прямой $a_1 i_1 = b_1 j_1 + d_1$ определим какой именно из двух концов дает искомый минимум.

Обозначим через $T = \{1 \le i \le N_1 \mid \exists j\colon (i; j) \in D_<\}$. Обозначим через

$$t = \begin{cases} \min\limits_{i_1 \in T} i_1, & a_1 \ge b_1 \\ \max\limits_{i_1 \in T} i_1, & a_1 < b_1. \end{cases}$$

Тогда $t$ – абсцисса искомой точки. Тогда самая близкая точка – это $(t; b_1^{-1}(a_1 t - d_1))$. Тогда $\min\limits_{(i_1; j_1) \in D_<} \{j_1 - i_1\} = \dfrac{a_1 t - d_1}{b_1} - t$.

В случае $b_1 = 0$, получаем $a_1 \ne 0$ (т.к. $|D_<| \ge 1$). Тогда система (12) сводится к уравнению прямой вида $a_1 i_1 = d_1$, следовательно, $\min\limits_{(i_1; j_1) \in D_<} \{j_1 - i_1\} = 1$ и достигается в точке $(a_1^{-1} d_1; a_1^{-1} d_1 + 1)$.

Обозначим через

$$m = \begin{cases} \dfrac{a_1 t - d_1}{b_1} - t, & |D| = +\infty, b_1 \ne 0, \\ 1, & |D| = +\infty, b_1 = 0, \\ \dfrac{a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_2 d_1 - b_1 d_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, & |D| = 1. \end{cases}$$

Тогда в общем случае $\min\limits_{(i_1; j_1) \in D_<} \{j_1 - i_1\} = m$. Подведем итог:

$$z = \begin{cases} \dfrac{w\left(N_2 - 1 + T_{it} + T_{send}\right)}{m}, & D_< \neq \phi \\ 0, & D_< = \phi \end{cases}$$

# Список литературы


1. Воеводин В. В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб: БХВ-Петербург, 2002. 608 с.
2. Сергиенко А.М. VHDL для проектирования вычислительных устройств. К.: ЧП «Корнейчук», ООО «ТИД «ДС», 2003. 208 с.
3. Французов Ю.А. Обзор методов распараллеливания кода и программной конвейеризации // Программирование. 1992. № 3. С. 16-37.
4. Штейнберг Р.Б., Вычисление задержки в стартах конвейеров для суперкомпьютеров со структурно процедурной организацией вычислений // Искусственный интеллект. Украина, Донецк, ДонДИШИ, «Наука и Освита». 2003. № 4. С. 105-112.
5. Штейнберг Р.Б. Реализация модели конвейерных вычислений в ОРС // XIII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». Тезисы докладов. Ростов-на-Дону, 2005, 195 с. ISBN 5-94153-097-8.
6. Allen R., Kennedy K. Optimizing compilers for modern architectures. Morgan Kaufmann Publishers. An Imprint of Elsevier. 2002, 790 p.
7. Открытая Распараллеливающая Система. http://www.ops.rsu.ru